Övning 1

Introduktion

Varmt välkomna till första övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se, F-05, doktorand i reglerteknik sedan 2010

For those who does not speak swedish, there is one group given in english

Kurmaterialet är tillgängligt på kurshemsidan

Vanliga övningar:

- Börjar med teori
- Löser sedan uppgifter ur exempelsamlingen
- Avbryt gärna och ställ frågor!!
- Finns två grupper (a,b och c,d)

Labbar:

- Första labben är snart!
- Anmälan sker på kurshemsidan
- Läs igenom lab-PM innan labben
- Det finns förberedelseuppgifter till labbarna som ska vara gjorda innan ni kommer dit
- Till andra labben är det en KS som ni måste klara av för att få göra labben

Teori

System

Reglerteknik handlar om att analysera och styra *dynamiska* (tidsberoende) system. Exempelvis vill vi med en konstantfarthållare reglera hastigheten för en bil, då vägens lutning kan variera.

Systemen som vi betraktar är kausala, dvs utsignalen beror bara på insignal och störsignal bakåt i tiden.

Systemen beskrivs med hjälp av differentialekvationer, e.g.,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -ay(t) + bu(t) + cv(t)$$

Signaler

Insignal, styrsignal $u(t)$ Det som vi kan kontrollera, exempelvis gaspådraget

Utsignal $y(t)$ Det som vi vill styra, exempelvis hastigheten

Störsignal $v(t)$ Yttre faktorer som vi inte kan kontrollera, exempelvis vägens lutning

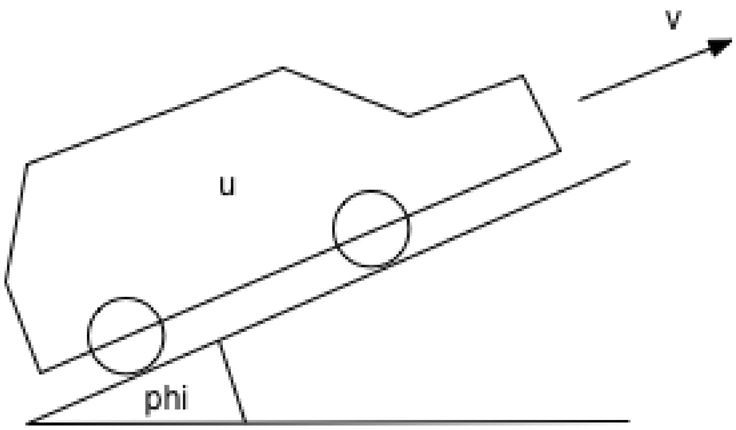

Figure 1: Konstantfarthållare

Laplace transformer

Laplacetransformen är en *linjär* integraltransform som kan användas för att förenkla lösningarna till differentialekvationer. Istället för att lösa differentialekvationer så får vi algebraiska ekvationer.

$$\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = Y(s)$$

- Tidsdomänen: $y(t)$, små bokstäver, parameter t
- Laplacedomänen: $Y(s)$, stora bokstäver, parameter s

En stor del av kursen kommer arbeta i Laplace-domänen.

Överföringsfunktioner

Överföringsfunktion från insignal till utsignal $Y(s) = G(s)U(s)$. Betrakta systemet

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + u(t), \quad y(0) = 0$$

Laplacetransform ger

$$sY(s) = -aY(s) + U(s)$$

eller

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s+a}}_{G(s)} U(s)$$

Notera att i Laplacedomänen behöver man bara multiplicera ihop algebraiska överföringsfunktioner

För linjära system kan överföringsfunktionen skrivas som $G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ där P, Q är polynom.

Poler

Är nollställena till nämnaren av $G(s)$, i.e., nollställena till $Q(s)$.

"Polerna är där $G(s) \to \infty$"

Poler är viktiga för systemets dynamik och stabilitet. Från komplexanalysen får vi stabilitetsvillkoren:

- Alla poler strikt i VHP (Vänster Halv-Plan) $\Rightarrow$ Systemet är stabilt
- Någon pol strikt i HHP (Höger Halv-Plan) $\Rightarrow$ Systemet är instabilt

Ex $G(s) = \frac{1}{s+a}$ har en pol i $s = -a$.

Karakterisering av poler

- Avstånd från origo avgör systemets hastighet. Långt avstånd till origo = snabbt system.
- Systemet domineras av de långsammaste polerna

Ex för systemet $\dot{y}(t) = -ay(t)$ med pol i $s = -a$ har vi lösningen $y(t) = Ce^{-at}$. Stabilt om $a > 0$, instabilt om $a < 0$. Snabbare om $|a|$ större.

- Imaginära poler ger svängigt system
- Imaginära poler kommer i konjugat-par

Ex $G(s) = \frac{1}{s+bi}\frac{1}{s-bi} = \frac{1}{s^2+b^2}$ ger

$$(s^2 + b^2)Y(s) = U(s)$$

$$\ddot{y}(t) + b^2 y(t) = u(t)$$

med $u(t) = 0$ fås lösningen $y(t) = C\cos bt$, dvs ett svängigt system!

Nollställen

Nollställen är till täljaren av $G(s)$, i.e., nollställena till $P(s)$.

Nollställena påverkar *transienta* beteended, men ej den asymptotiska stabiliteten.

Stegsvar

Stegsvaret är utsignalen då insignalen är ett steg:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t > 0 \end{cases}, \quad U(s) = \frac{A}{s}$$

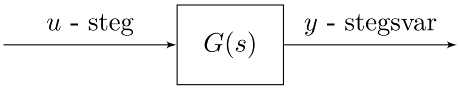

Figure 2: Block diagram

Slutvärdessatsen

Givet ett *stabilt* system $G(s)$ (alla poler i VHP) så gäller

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Detta gör att vi kan beräkna asymptotiska värdet direkt i Laplace-domänen.

Statiska förstärkningen

Förstärkningen av en konstant signal.

Om systemet är stabilt kan vi använda slutvärdessatsen och får

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{A}{s} = \lim_{s\to 0} AG(s)$$

Den statiska förstärkingen är alltså $|G(0)|$.

Problem 2.11

2.11 a)

Insignal, styrsignal $u(t)$ Det som vi kan kontrollera, flöde av NaOH lösning

Utsignal $y(t)$ Det som vi vill styra, pH-värde

Störsignal $v(t)$ Yttre faktorer som vi inte kan kontrollera, flödet av syra

2.11 b)

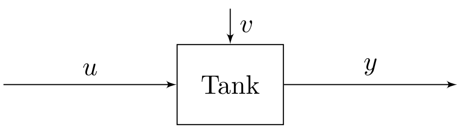

Figure 3: Blockdiagram utan reglering

- +Snabb
- -Måste mäte v

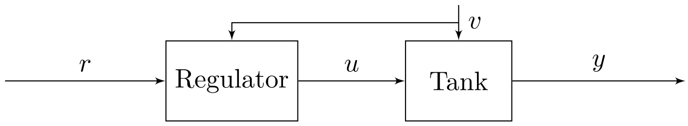

Figure 4: Blockdiagram med framkoppling

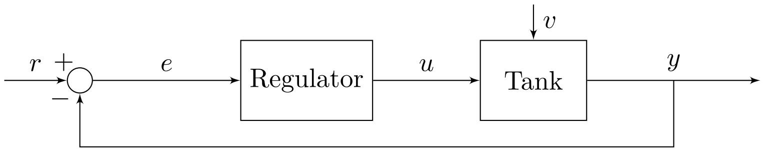

Figure 5: Blockdiagram med återkoppling

- -Känslig för modellfel

- +Behöver ej mäta störningar
- +Kan stabilisera instabila processer
- +Hanterar modellfel
- -Långsammare
- -Känslig för brus

Problem 2.10

Stabilitet

Titta först på stabiliteten. Överföringsfunktion G_6 har en pol i HHP, och är alltså inte stabil, men alla stegsvar är stabila.

Statisk förstärkning

Notera att alla stegsvar har axlar med samma skala. Eftersom för de stabila överföringsfunktionerna kan vi använda slutvärdessatsen som säger att slutvärdet är lika med den statiska förstärkningen $|G(0)|$. Vi ser att B och D har dubbla statiska förstärkningen jämfört med A och C. Den statiska förstärkningen för överföringsfunktionerna är 0.5, 1, 1, 2, 2, så alltså kan vi para ihop

$$A, C \Leftrightarrow G_1, G_4$$
$$B, D \Leftrightarrow G_3, G_5$$

Dämpning

G_4 domineras av polen i -2, och bör alltså inte vara så svängig, men G_1 har stor imaginär del jämfört med realdelen. Alltså är G_1 dåligt dämpad, och vi kan para ihop

$$A \Leftrightarrow G_4$$
$$C \Leftrightarrow G_1$$

G_3 har en pol i -2 och G_5 pol i -3, så G_3 borde vara snabbare. Dessutom har G_3 nollställe, vilket kan leda till en översläng. Vi parar då ihop

$$B \Leftrightarrow G_3$$
$$D \Leftrightarrow G_5$$

Problem 2.5

Stabilitet

Stegsvar 3 och stegsvar 6 är instabilia, och de enda system som inte har alla poler i VHP är B och D.

Enkelpol i origo

System B har en enkelpol i origo, dvs $G_B(s) = \frac{1}{s}$. Alltså är $Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$, eller $\dot{y}(t) = u(t)$. Notera att $u(t)$ är konstant (stegsvar), så stegsvaret för system B bör vara en rät linje, och detta motsvarar stegsvar 6.

Vi kan alltså göra ihopparningen

$$B \Leftrightarrow 6$$
$$D \Leftrightarrow 3$$

Imaginära poler

System F är enda systemet med imaginära poler som ger ett svängigt beteende, vilket alltså motsvarar stegsvar 4.

$$F \Leftrightarrow 4$$

Nollställen

Kvar är system A, C och E, vilka enbart skiljer på sina nollställen. Titta först på system A, som har ett nollställe i origo, $G_A(s) = \frac{s}{(s+a)(s+b)}$. Använd slutvärdessatsen,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG_A(s)\frac{A}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{(s+a)(s+b)}A = 0$$

Ända stegsvaret som går mot noll är 2, alltså har vi

$$A \Leftrightarrow 2$$

Titta nu på system C som saknar nollställe,

$$G_C(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$$

$$Y(s) = G_C(s)U(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}\frac{A}{s}$$

Transformera $\mathcal{L}^{-1}$ för att få stegsvaret (via tabell, sida 234 i läroboken)

$$y(t) = \frac{1}{ab}\left(1 - \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{b-a}\right), \quad a, b > 0,\ a \neq b$$

Låt oss titta på derivatan

$$\dot{y}(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$$

Vi kan både notera att derivatan vid tid $t = 0$ är $\dot{y}(t) = 0$, dessutom är $t = 0$ enda tillfället då $\dot{y}(t) = 0$, vilket enbart stämmer med stegsvar 1.

$$C \Leftrightarrow 1$$
$$E \Leftrightarrow 5$$