Övning 5

Introduktion

Varmt välkomna till femte övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se

Repetition

Relativ dämpning

För ett andra ordningens system utan nollställen, där överföringsfunktionen är

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

ω_0 är avståndet från polerna till origo. Större ω_0 ger snabbare system.

ζ kallas för *relativ dämpning*, och ger stegsvarets kvalitativa dämpning. Större ζ, mindre $\frac{|\text{Im-del}|}{|\text{Re-del}|}$, bättre dämpat.

Rotort

Ett sätt att visa polernas placering som en funktion av en systemparameter K. 10 steg för att skissa upp rotorten.

Teori

Argumentvariationsprincipen

Repetition från komplex analysen.

Låt $f(z)$ vara en analytisk funktion (dess komplexa derivata existerar) i ett öppet område $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, så när som på ett ändligt antal poler.

Låt γ vara en sluten kurva som inte skär sig själv, och är riktad motsols.

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg_\gamma f(z)$$

N = antalet omslutna nollställen, P = antalet omslutna poler.

För att bestämma $\operatorname{var} \arg_\gamma f(z)$ så låter vi $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, och ritar kurvan $f(\gamma(t))$ för $t \in [0, 1]$.

arg är vinkeln i det komplexa talplanet, och var är variationen, d.v.s., vi integrerar vinkeln till kurvan. När vi tittar på $\frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg$ får vi antalet varv som kurvan går kring origo, räknat motsols (negativt tecken om kurvan går medsols).

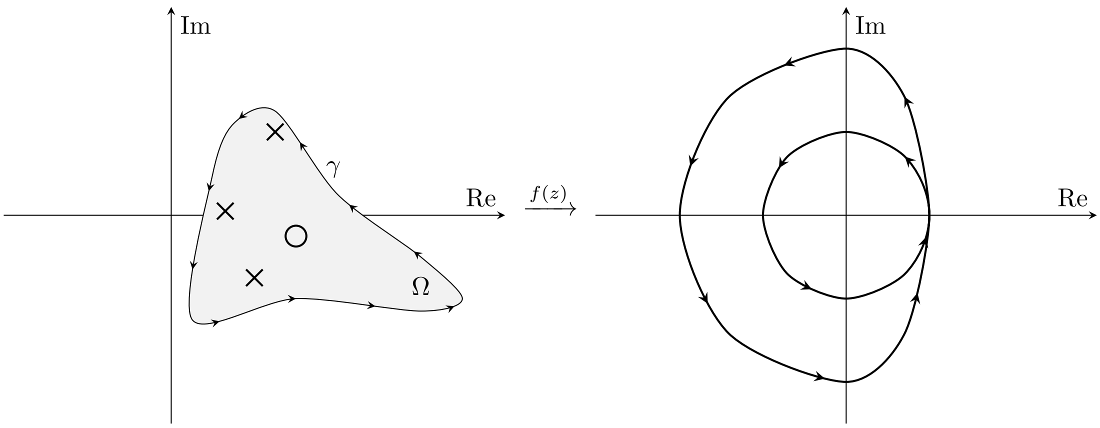

Figure 1: Avbildning av kurvan γ med funktionen $f(z)$

Nyquistkriteriet

Vi är intresserade av det slutna systemets poler, men oftast är det enklare att arbeta med det öppna systemet. Nyquistkriteriet använder argumentvariationsprincipen för att ge ett villkor på det öppna systemet som garanterar stabilitet för det slutna systemet.

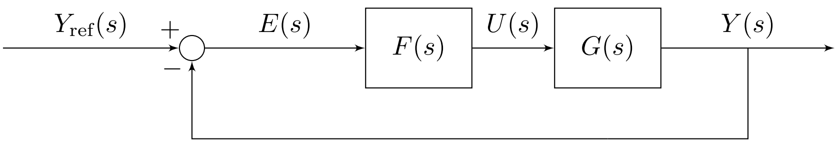

Figure 2: Slutna systemet

$$G_O(s) = F(s)G(s)$$
$$G_C(s) = \frac{G_O}{1+G_O}$$

Poler till G_C är nollställen till $1+G_O$, så har $1+G_O$ några nollställen i HHP?

Låt kurvan γ omsluta HHP (motsols), och uteslut poler på imaginära axeln.

Använd argumentvariationsprincipen för $1+G_O$ längs med kurvan γ, så fås $N-P$ för $1+G_O$ som antalet varv kurvan gör runt origo. Om vi istället tittar på G_O längs med kurvan γ så fås $N-P$ för $1+G_O$ som antalet varv kurvan gör kring -1.

Notera nu att ett nollställe till $1+G_O$ är en pol till G_C, och en pol till $1+G_O$ är även en pol till G_O.

Nyquistkriteriet Låt P_O vara antalet poler till G_O i HHP, och P_C antalet poler till G_C i HHP. Då är

$$P_C - P_O = \text{antal varv kurvan gör kring -1}$$

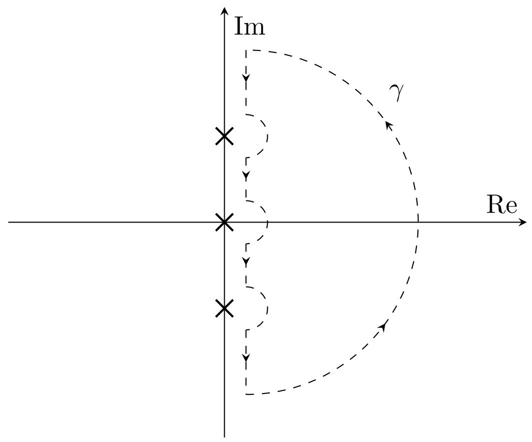

Figure 3: Kurvan γ som omsluter HHP

$$P_C = P_O + \text{antal varv kurvan gör kring -1}$$

Observera att varven alltid räknas med tecken! Positivt för varv som går motsols, negativt för varv som går medsols.

Om G_O saknar poler i HHP ($P_O = 0$) så fås polerna till G_C direkt som antalet varv kurvan gör kring -1.

Nyquistkurvan Plot av $G_O(i\omega)$ enbart för $\omega \in [0, \infty)$. Räcker oftast för att lista ut hur många varv kurvan gör kring -1.

Gummibandsprincipen för att räkna varv kring -1. Tänk er kurvan som ett gummiband, och en spik som är nedslagen i -1. Ni får deformera gummibandet hur ni vill, men inte föra det över spiken. Räkna antalet varv som gummibandet är lindat runt spiken. Om det öppna systemet är stabilt så är Nyquistkriteriet ekvivalent med att gummibandet inte sitter fast runt spiken.

Problem 3.15

3.15 a)

Notera först att G_O saknar poler i HHP, vilket innebär att Nyquistkriteriet säger att det slutna systemet G_C är stabilt om kurvan inte omsluter -1.

(i) Kurvan omsluter inte -1, och alltså är G_C stabil.

(ii) Kurvan omsluter inte heller här -1, och alltså är G_C stabil.

(iii) Kurvan omluster -1 två varv, och alltså är G_C instabil.

(iv) Titta noga, och räkna varv med tecken. Kurvan omsluter faktiskt inte -1! Alltså är G_C stabil även här.

3.15 b)

I figurerna är $K = 1$. Vad händer om vi ändrar K? Varje punkt på kurvan multipliceras med K, och alltså är K en ren skalning av kurvan. Frågan är alltså hur mycket kan kurvan skalas om, för att systemet ska vara stabilt?

(i) Systemet kan skalas upp $\frac{1}{0.4} = 2.5$ gånger innan -1 omsluts två varv. Dvs stabil om $0 < K < 2.5$.

(ii) Här spelar inte skalningen någon roll, -1 kommer aldrig omslutas av kurvan. Stabil för alla $K > 0$.

(iii) Systemet var instabilt, men om kurvan skalas ner med minst en faktor $\frac{1}{2}$ så omsluts inte längre -1. Stabil för $0 < K < 0.5$.

(iv) Rita upp halva Nyquistkurvan för att enklare se omslutningarna. Om $K < \frac{1}{4}$ så ligger hela kurvan innanför -1, och är alltså stabil, och om $K > \frac{1}{2}$ så ligger -1 i den "inre" cirkeln, där vi redan sett att systemet är stabilt. Vad händer då $\frac{1}{4} < K < \frac{1}{2}$? Titta noggrant så ser vi att kurvan omsluts två varv, och systemet blir därför instabilt!

Problem 3.16

3.16 a)

Rita Nyquistkurvan för en integrator $G(s) = \frac{1}{s}$. Notera att det är en pol i origo (på imaginära axeln) som ska uteslutas av kurvan γ.

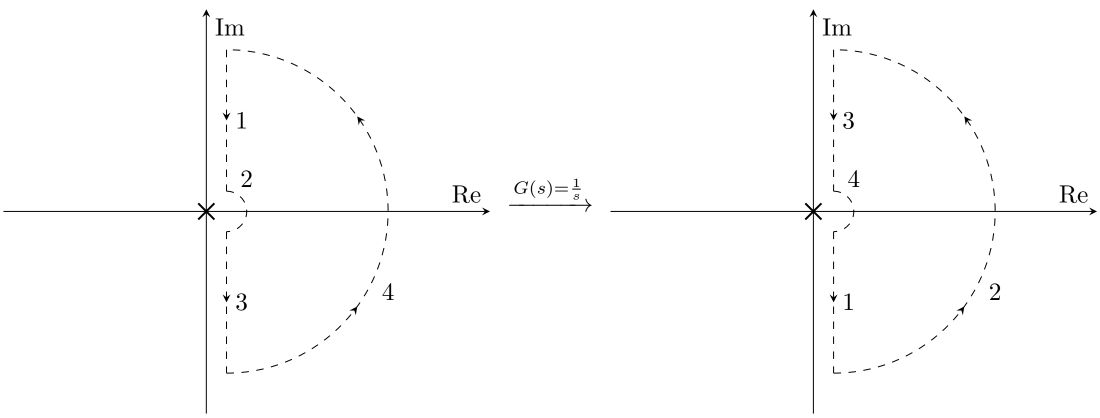

Figure 4: Kurvan γ

Delar in kurvan i fyra delar:

Del 1 Övre delen av imaginära axeln, $s = i\omega$, $w : \infty \to 0$

$$G(s) = G(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = -\frac{i}{\omega}$$

Avbildas till nedre delen av imaginära axeln.

Del 2 Halvcirkeln som går runt origo $s = re^{i\theta}$, $r \to 0_+$, $\theta : \frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}$.

$$G(s) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Avbildas på en halvcirkeln som omsluter HHP.

Del 3 Nedre delen av imaginära axeln $s = i\omega$, $w : 0 \to \infty$

$$G(s) = G(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = -\frac{i}{\omega}$$

Avbildas på övre delen av imaginära axeln.

Del 4 Halvcirkeln som omsluter HHP $s = Re^{i\theta}$, $R \to \infty$, $\theta : -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$.

$$G(s) = \frac{1}{R}e^{-i\theta}$$

Avbildas på halvcirkeln som går runt origo.

Problem 3.17

3.17 a)

Öppna systemet är $G_O = KG(s)$, G_O är stabil och har alltså inga poler i HHP.

G_C är då stabil om Nyquistkurvan inte omsluter -1.

Den proportionella regulatorn K innebär en ren skalning av Nyquistkurvan, och kurvan måste minskas med en faktor $1.5 = \frac{3}{2}$ för att inte omsluta -1. Alltså är det slutna systemet G_C stabilt om $K < \frac{2}{3}$.

3.17 b)

Från deluppgift a) såg vi att systemet är instabilt om $K \geq \frac{2}{3}$. Om systemet är instabilt så existerar inget slutvärde, så vi antar nu att $K < \frac{2}{3}$ för att systemet ska vara stabilt. Slutvärdet existerar då, och vi kan använda slutvärdessatsen för att bestämma det statiska felet.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$
$$E(s) = Y_{\text{ref}}(s) - Y(s), \quad Y(s) = E(s)KG(s)$$
$$E(s) = \frac{1}{1+KG(s)} Y_{\text{ref}}(s)$$

Referenssignalen var ett enhetssteg, $Y_{\text{ref}}(s) = \frac{1}{s}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+KG(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+KG(0)}$$

Från figuren ser vi att $G(0) = 2$, och alltså får vi att det statiska felet är

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+KG(0)} = \frac{1}{1+2K}$$

som gäller då $K < \frac{2}{3}$, och instabil om $K \geq \frac{2}{3}$.

3.17 c)

Nu byter vi ut den proportionella regulatorn mot en integrerande regulator, d.v.s., öppna systemet är $G_O(s) = \frac{K}{s}G(s)$. I figuren har vi Nyquistkurvan för $G(s)$, hur påverkas den av $\frac{K}{s}$?

Titta först på vinkeln

$$\arg\left(G_O(i\omega)\right) = \arg\left(\frac{K}{i\omega}G(i\omega)\right) = \underbrace{\arg K}_{0} - \underbrace{\arg i\omega}_{\frac{\pi}{2}} + \arg G(i\omega) = \arg G(i\omega) - \frac{\pi}{2}$$

Kurvan vrids alltså med vinkeln $-\frac{\pi}{2}$, eller minus $90°$.

Titta nu på beloppet

$$|G_O(i\omega)| = \left|\frac{K}{i\omega}\right| \cdot |G(i\omega)| = \frac{K}{\omega}|G(i\omega)|$$

Beloppet skalas alltså om med faktorn $\frac{K}{\omega}$, som är frekvensberoende.

Den kritiska punkten är -1 på den reella axeln. När figuren har vridits $-\frac{\pi}{2}$ så fås att den kritiska frekvensen är vid $\omega = 2$ (i.e., där den vridna kurvan skär negativa reella axeln).

Kurvans belopp vid frekvensen $\omega = 2$ är alltså

$$|G_O(2i)| = \frac{K}{2}|G(2i)|.$$

Från figuren fås även att $|G(2i)| = 3$, så

$$|G_O(2i)| = K\frac{3}{2}$$

För att systemet ska vara stabilt så får inte G_O omsluta -1, vi vill alltså att beloppet ska vara mindre än 1:

$$|G_O(2i)| = K\frac{3}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad K < \frac{2}{3}$$