Övning 8

Introduktion

Varmt välkomna till åttonde övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se

Repetition

Frekvenssvar

Frekvenssvaret är utsignalen då insginalen är en sinusvåg med frekvens ω och amplitud A,

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega t).$$

Utsignalen blir (efter att transienter har försvunnit)

$$y(t) = |G(i\omega)| \cdot A \cdot \sin(\omega t + \arg(G(i\omega)))$$

För att bestämma frekvenssvaret är vi alltså intresserade av förstärkningen $|G(i\omega)|$ och fasförskjutingen $\arg(G(i\omega))$ för olika frekvenser ω.

Bodediagram

I ett Bodediagram ritar man upp en beloppskurva $|G(i\omega)|$ och en faskurva $\arg(G(i\omega))$ som funktioner av frekvensen ω. Oftast används en $\log - \log$ plot för att få med ett brett spektrum av värden. För beloppskurvan används ofta decibelskala (dB) där värdet i dB ges av $20 \log_{10} |G(i\omega)|$.

Skärfrekvensen ω_c i öppna systemet G_O

- Bode: Den frekvens ω där beloppskurvan skär 1
- Nyquist: Den frekvens ω där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln
- Omvänt proportionell mot stigtiden $\sim \frac{1}{T_r}$

Fasskärfrekvensen ω_p i öppna systemet G_O

- Bode: Den frekvens ω där faskurvan skär $-180°$
- Nyquist: Den frekvens ω där Nyquistkurvan skär negativa reella axeln

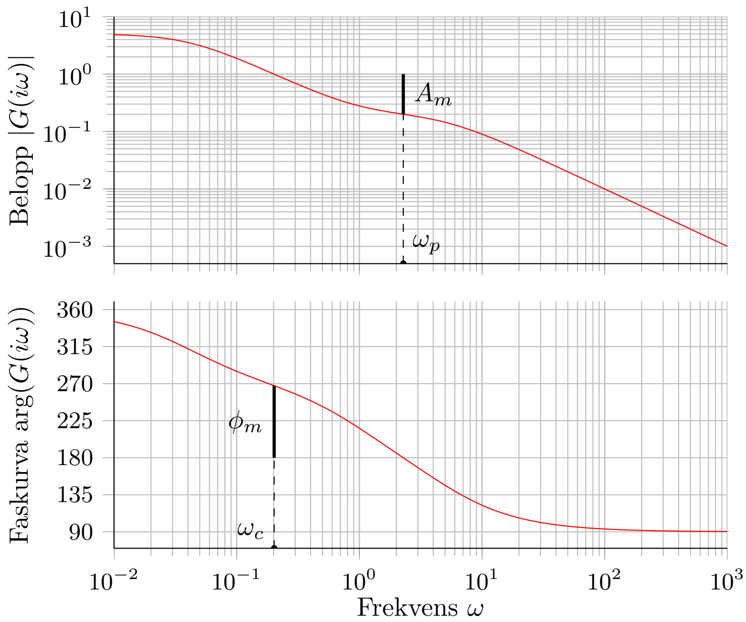

Figure 1: Bodediagram

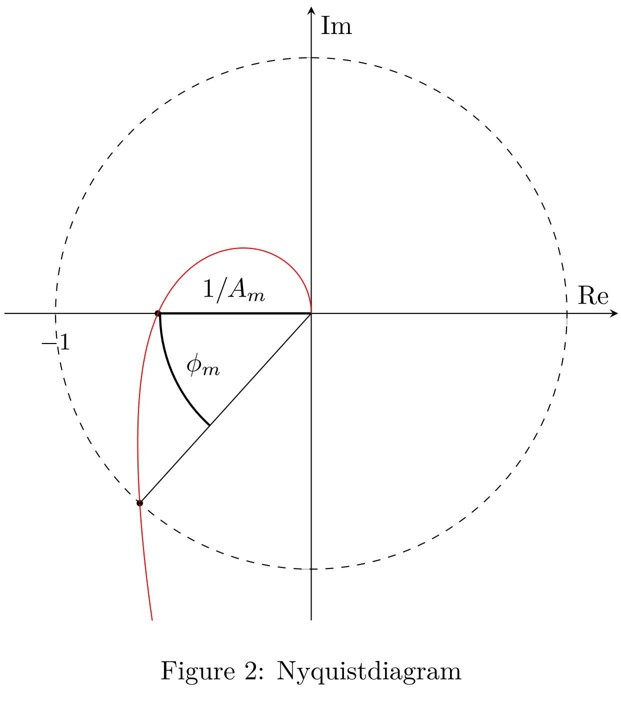

Figure 2: Nyquistdiagram

Fasmarginal ϕ_m i öppna systemet G_O

- Ett mått på hur mycket faskurvan kan förskjutas innan instabilitet uppstår
- Bode: Faskurvans avstånd till $-180°$ vid $\omega = \omega_c$
- Nyquist: Vinkeln mellan negativa reella axeln och den punkt där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln
- Stor fasmarginal, bra dämpat system

Amplitudmarginal A_m i öppna systemet G_O

- Ett mått på hur mycket amplitudkurvan kan höjas innan instabilitet uppstår
- Bode: Amplitudkurvans avstånd till 1 vid $\omega = \omega_p$
- Nyquist: Inversa avståndet från origo till den punkt där Nyquistkurvan skär negativa reella axeln

Resonanstopp M_p i slutna systemet G_C

- Högsta värdet på förstärkningen
- Omvänt proportionell mot relativa dämpningen $\sim \frac{1}{\zeta}$

Resonansfrekvensen ω_r i slutna systemet G_C

- Frekvensen vid resonanstoppen
- Frekvensen för svängningar hos stegsvaret

Bandbredden ω_B i slutna systemet G_C

- Frekvensen där beloppskurvan går under $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (-3 dB)
- Om $G_C(0) \neq 1$ så definieras bandbredden så att $|G_C(i\omega_b)| < |G_C(0)|/\sqrt{2}$
- Omvänt proportionell mot stigtiden $\sim \frac{1}{T_r}$

Teori

Känslighetsfunktionen

Titta på utsignalen i ett system med en störning v. Med hjälp av superpositionsprincipen av signaler kan vi titta på överföringsfunktionen från referenssignalen till utsignalen och störningen till utsignalen separat.

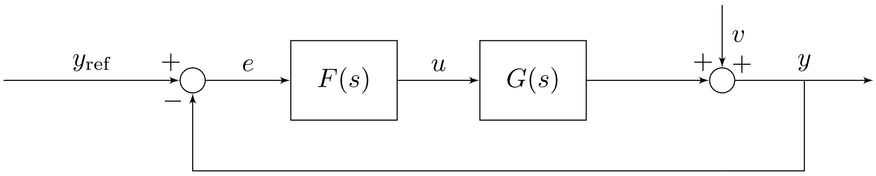

Figure 3: Blockdiagram

Referenssignal till utsignal $Y_{\mathbf{ref}} \to Y$ Som tidigare har vi att $Y(s) = G_C(s)Y_{\text{ref}}(s)$

Störning till utsignal $V \to Y$ Från blockdiagrammet får vi att $Y(s) = \underbrace{\frac{1}{1+G_O(s)}}_{S(s)} V(s)$. Vi kallar denna överföringsfunktion $S(s)$ för *känslighetsfunktionen*, i.e., hur känsligt systemet är för störningar.

Hela utsignalen fås som summan av de två bidragen

$$Y(s) = G_C(s)Y_{\text{ref}}(s) + S(s)V(s)$$

Felkoefficienter

Felet i reglerloopen är

$$E(s) = Y_{\text{ref}}(s) - Y(s) = \underbrace{(1 - G_C(s))}_{S(s)} Y_{\text{ref}}(s) - S(s)V(s) = S(s)(Y_{\text{ref}}(s) - V(s))$$

$S(s)$ avgör beteendet från både referenssignalen och störningen.

Använd slutvärdessatsen för att titta på felet från exempelvis referenssignalen ($V(s) = 0$),

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)Y_{\text{ref}}(s)$$

Stegsvar har $Y_{\text{ref}}(s) = \frac{A}{s}$, så då blir felet

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{A}{s} = \underbrace{S(0)}_{e_0} \cdot A$$

och vi definierar detta som första felkoefficienten $e_0 = S(0)$.

Notera att om systemet innehåller in integrator så är $G_O(0) = \infty$, och alltså $e_0 = S(0) = \frac{1}{1+G_O(0)} = 0$. Då är det dags att titta på rampsvaret.

Rampsvar har insignalen $y_{\text{ref}}(t) = A \cdot t$, eller $Y_{\text{ref}}(s) = \frac{A}{s^2}$. Antag nu att första felkoefficienten är 0, och vi kan då skriva $S(s) = \frac{1}{1+\frac{H(s)}{s}}$. Felet blir då

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{A}{s^2} = \underbrace{\lim_{s\to 0}\frac{S(s)}{s}}_{e_1} \cdot A = \underbrace{\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+H(s)}}_{e_1} \cdot A = \underbrace{\frac{1}{H(0)}}_{e_1} \cdot A$$

Här definierade vi den andra felkoefficienten e_1.

Om systemet innehåller en dubbelintegrator så är även $H(0) = \infty$, och alltså är $e_1 = 0$, och vi kan då gå vidare och titta på en andra ordningens insignal $y(t) = A \cdot t^2$.

Serieutveckling av känslighetsfunktionen kan skrivas med hjälp av felkoefficienterna som

$$S(s) = e_0 + e_1 s + e_2 s^2 + \dots$$

Lead-lag kompensering

Är ett sätt att designa regulatorer för att få en önskad dämpning (fasmarginal) och hastighet (skärfrekvens) på systemet. Regulatorn består av två delar, först en *lead*-del som är fasavancerande, och sedan en *lag*-del som är fasretarderande men används för att hantera stationära felet.

Lead-lag kompenseringen är en approximation, så när regulatorn är designad så bör man testa systemet för att se att specifikationen är uppfylld, och annars iterera fram en ny regulator.

Givet är en önskad skärfrekvens $\omega_{c,d}$, en önskad fasmarginal ϕ_m och en önskad felkoeffient e_i för systemet.

Lead-delen Den fasavancerande länken är en PD-regulator på formen

$$F_{\text{lead}}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}$$

Med konstanten K kan skärfrekvensen väljas fritt, och den ändrar inte faskurvan. Titta således på vid den önskade skärfrekvensen $\omega_{c,d}$ och se om fasmarginalen redan är tillräcklig. I så fall behövs enbart en proportionell regulator.

1. Om inte fasmarginalen är tillräcklig, utan måste höjas så används lead-länken. Parametern β avgör den maximala höjningen av fasen enligt $\phi_{\max} = \arctan\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}}$, men vi använder oss av diagrammet på sidan 106 i kursboken för att bestämma β.

   (Notera att små β orsakar stor förstärkning för höga frekvenser, i.e., brus)

2. Parametern τ_D bestämmer var i frekvensspektrat som fasavanceringen är maximal, och vi vill ha den vid den önskade skärfrekvensen $\omega_{c,d}$, och vi väljer den därför enligt regeln

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}}$$

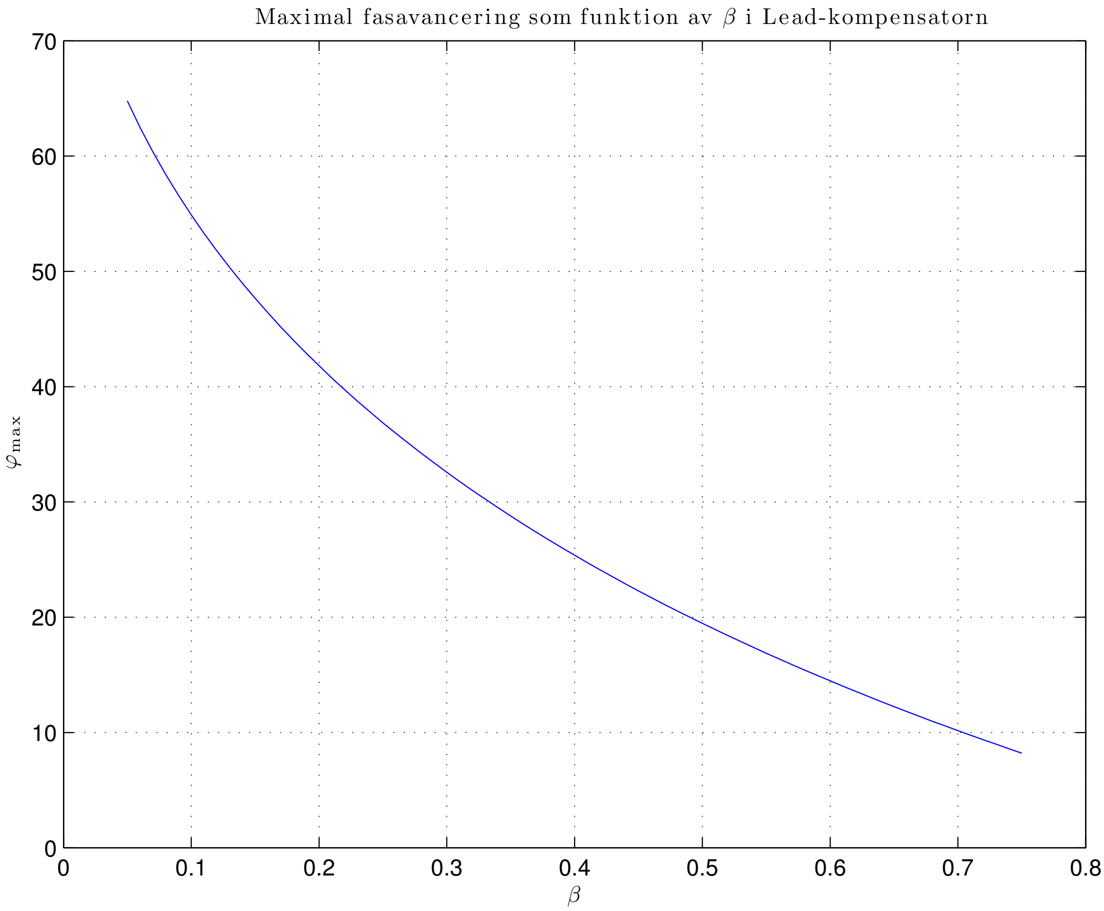

Figure 4: Maximal fasavancering med en lead-länk

3. Välj nu K så att önskad skärfrekvens $\omega_{c,d}$ uppnås. Notera att lead-länken har förstärkningen

$$|F_{\text{lead}}(i\omega_{c,d})| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}$$

   så K väljs till $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_{c,d})|}$.

   Notera att lead-länkens förstärkning ligger mellan $|F_{\text{lead}}(i0)| = K$ och $|F_{\text{lead}}(i\infty)| = \frac{K}{\beta}$.

4. Om fasavanceringen behöver vara större än ca 40° så används normalt två identiska lead-länkar som vardera sköter halva fasavanceringen. Vad händer då med K-värdet?

Lag-delen Den fasretarderande länken är en PI-regulator på formen

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

och används för att minska det stationära felet.

1. Använd slutvärdessatsen för att beräkna det stationära felet (och tänk på insignalen: steg, ramp, ...). Om villkoret för det stationära felet redan är uppfyllt behövs ingen lag-del. En ren integrering ($\gamma = 0$) tar bort en felkoefficient, men det ger också oändlig förstärkning för små frekvenser och ger en pol i origo.

   Med $\gamma > 0$ blir lag-delen stabil, och förstärkningen för $\omega = 0$ blir $\frac{1}{\gamma}$. Välj γ så att felkoefficienten uppnås.

   Kom ihåg att lead-delen gav en förstärkning om K för låga frekvenser!

2. Lag-delen ger en förstärkning av systemet, vilket inte är önskvärt för höga frekvenser då även fasen försämras. Parametern τ_I avgör hur höga frekvenser som förstärks, och väljs i regel till

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}}$$

   Med det värdet så försämras fasen med ca 5.7° vid den önskade skärfrekvensen, vilket alltså måste tas med när man designade lead-delen!

   Typiskt så antar vi att en lag-del kommer behövas, och lägger därför direkt på 5.7° till fashöjningen när vi skapar lead-länken.

Rita bodediagram för det nya systemet

$$G_O(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}G(s)$$

och kontrollera att specifikationen är uppfylld!

Problem 5.10

Notera först att vi har fått bodediagrammet för $G_1(s)$ och inte för $G(s) = G_1(s)\frac{1}{s}$, så vi börjar med att undersöka hur de skiljer sig:

$$|G(i\omega)| = |G_1(i\omega)| \cdot |\frac{1}{i\omega}| = |G_1(i\omega)| \cdot \frac{1}{\omega}$$

$$\arg G(i\omega) = \arg G_1(i\omega) + \arg \frac{1}{i\omega} = \arg G_1(i\omega) - 90°$$

Proportionell regulator

Vi undersöker först hur snabbt system vi kan skapa med en proportionell regulator. En rent proportionell regulator ändrar inte fasen, så vi tittar på vilken skärfrekvens ω_c som kan åstakommas med en proportionell regulator om fasmarginalen ϕ_m ska vara 40°.

$$\phi_m = 40^\circ = \arg G(i\omega_c) - (-180^\circ) = \arg G_1(i\omega_c) - 90^\circ - (-180^\circ), \quad \Rightarrow \quad \arg G_1(i\omega_c) = -50^\circ$$

Från bodediagrammet fås att $\omega_c = 0.5$ rad/s är den maximala skärfrekvensen med en proportionell regulator, som behåller 40° fasmarginal.

Låt oss även bestämma vilket K_P-värde som ger denna skärfrekvens: $|G_O(i\omega_c)| = 1 = K_P|G_1(i\omega_c)| \cdot \frac{1}{\omega_c}$, alltså är $K_P = \frac{0.5}{|G_1(i0.5)|} \approx \frac{0.5}{0.12} \approx 4.2$.

Specifikation av nya systemet

- Dubbelt så snabbt som med en proportionell regulator, $\omega_{c,d} = 1$ rad/s
- Behålla fasmarginalen $\phi_m = 40^\circ$
- Stationära felet för en ramp ska vara 1% av felet med en P-regulator

Lead-länken

$$F_{\text{lead}}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}$$

1. Börjar med att besämma fasavanceringen. Tittar vid den önskade skärfrekvensen $\omega_{c,d} = 1$ rad/s. Från figuren fås att $\arg G(i) \approx -110^\circ$, och alltså har vi

   $$\phi_m = \arg G_1(i) - 90^\circ - (-180^\circ) = -20^\circ$$

   Vi vill ha en fasmarginal på 40°, så alltså måste fasen höjas med 60° plus 6° för en senare lag-länk.

   Total fasavancering är alltså 66°.

2. Bestäm nu parametern β från diagrammet. Eftersom fasavanceringen är större än ca 40° så väljer vi att använda två lead-länkar som vardera avancerar fasen med $\phi_{\max} = 33^\circ$.

   Från diagrammet får vi $\beta = 0.3$.

3. Nästa steg är att bestämma τ_D enligt regeln

   $$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} \approx 1.8$$

4. Välj slutligen förstärkningen K så att önskad skärfrekvens $\omega_{c,d} = 1$ rad/s uppnås. Notera att vi använder oss av två lead-länkar som vardera har förstärkningen $|F_{\text{lead}}(i\omega_{c,d})| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}$.

$$1 = |G_O(i\omega_{c,d})| = |F(i\omega_{c,d})| \cdot |G(i\omega_{c,d})| =$$

$$|F_{\text{lead}}(i\omega_{c,d})|^2 |G_1(i\omega_{c,d})| \cdot \frac{1}{\omega_{c,d}} = \left(\frac{K}{\sqrt{\beta}}\right)^2 \cdot 0.025 \cdot 1$$

$$K = \sqrt{40\beta} \approx \sqrt{12}$$

Lag-länken

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

1. Börja med att bestämma felkoefficienten. Notera att systemet $G(s)$ redan innehåller en ren integrator, så första felkoefficienten är 0. Tittar då direkt på andra felkoefficienten som hör till en ramp, $R(s) = \frac{A}{s^2}$.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)R(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F(s)G(s)}\frac{A}{s^2} =$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s + sF(s)G(s)} A = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + sF(s)G_1(s)\frac{1}{s}} A = \underbrace{\frac{1}{F(0)G_1(0)}}_{e_1} A$$

   Villkoret var att stationära felet skulle vara 1% av felet med en proportionell regulator, alltså att

$$\frac{1}{F_{\text{lead-lag}}(0)G_1(0)} = 0.01 \frac{1}{F_{\text{P}}(0)G_1(0)}$$

   eller $F_{\text{lead-lag}}(0) = 100 F_{\text{P}}(0)$. Statiska förstärkningen ska alltså vara 100 gånger större än med den proportionella regulatorn, som hade $K_P = 4.2$. Den statiska förstärkningen för vår lead-lag regulator är

$$F_{\text{lead-lag}}(0) = F_{\text{lead}}(0)^2 F_{\text{lag}}(0) = K^2 \frac{1}{\gamma} = 420$$

   vilket ger oss parametern $\gamma = \frac{1}{35} \approx 0.029$.

2. Sist ska vi bestämma τ_I enligt regeln

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}} = 10$$

Hela regulatorn

Sätter vi ihop de två lead-länkarna och lag-länken får vi regulatorn

$$F_{\text{lead-lag}}(s) = K^2 \left(\frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}\right)^2 \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = 12 \left(\frac{1.8s + 1}{0.3 \cdot 1.8s + 1}\right)^2 \frac{10s + 1}{10s + 0.029}$$

Problem 6.3

Utsignalen är

$$Y(s) = G_C(s)R(s) + S(s)V(s)$$

Vi tittar på överföringsfunktionen från störningen $V(s)$ till utsignalen $Y(s)$, alltså känslighetsfunktionen $S(s)$, och vill veta när amplituden förstärks. Amplituden skalas om med beloppet $|S(i\omega)|$, så vi undersöker när $|S(i\omega)| > 1$.

$$|S(i\omega)| = \left|\frac{1}{1 + G_O(i\omega)}\right| > 1 \quad \Rightarrow \quad |1 + G_O(i\omega)| < 1$$

Så störningen kommer förstärkas av de frekvenser på Nyquistkurvan som ligger inom en enhetscirkel centrerad i -1.

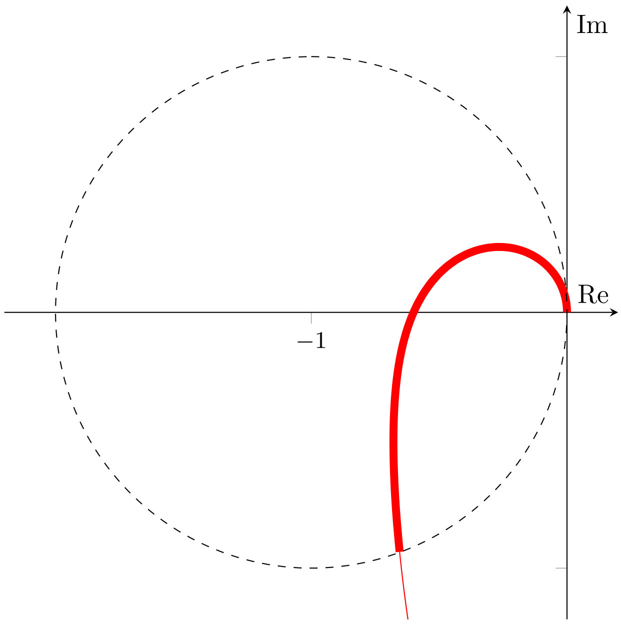

Figure 5: Nyquistkurvan för uppgift 6.3

Problem 6.1

Bestäm först det öppna systemet $G_O(s) = K\frac{1}{s(s+1)}$.

Utsignalen är

$$Y(s) = G_C(s)R(s) + S(s)V(s)$$

Vi tittar på överföringsfunktionen från störningen $V(s)$ till utsignalen $Y(s)$, alltså känslighetsfunktionen $S(s) = \frac{1}{1+G_O(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+K}$.

Titta nu på absolutvärdet då $s = i\omega$, $\omega = 1$,

$$|S(i)| = \left|\frac{i(i+1)}{i(i+1)+K}\right| = \left|\frac{i-1}{i-1+K}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(K-1)^2+1}}$$

Nu vill vi bestämma K så att förstärkningen är mindre än 1 vid frekvensen $\omega = 1$,

$$1 > |S(i)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(K-1)^2 + 1}}$$

$$\sqrt{(K-1)^2 + 1} > \sqrt{2}$$

$$(K-1)^2 > 1$$

Eftersom $K > 0$ alltid är positiv så har vi villkoret

$$K > 2$$