

Commande de systèmes non retardés par retour de sortie statique échantillonné

Alexandre SEURET¹, Karl H. JOHANSSON¹, Michel DAMBRINE²

¹ ACCESS Linnaeus Centre
Royal Institute of Technology, Stockholm, Suède

²LAMIH UMR CNRS-UVHC,
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis,
59313 Valenciennes cedex 9, France

seuret, kallej@kth.se, Michel.Dambrine@univ-valenciennes.fr

Résumé—Il est connu que pour des systèmes linéaires il n'est pas toujours possible de construire une loi de commande par retour de sortie statique qui stabilise le système. Cet article propose une méthode qui permet d'élargir la classe de ces systèmes en ajoutant un retard et un échantillonnage dans la loi de commande qui sont optimisés pour un couple de gains de contrôleur donné par rapport aux performances des solutions et par rapport à la taille de la mémoire du contrôleur. Un exemple montre la pertinence de cette méthode.

Mots-clés—Retour de sortie, commande échantillonnée, stabilité exponentielle, fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii discrétisées, retard stabilisant.

I. INTRODUCTION

Lorsque l'on étudie un processus réel, l'hypothèse de pouvoir connaître son état complet n'est pas toujours réaliste pour des raisons techniques (variables non mesurables ou non accessibles) ou économiques (prix du capteur). On ne dispose alors que d'une partie de l'état appelée la sortie. L'utilisation d'un observateur (ou "reconstructeur") est requise pour délivrer une estimation de l'état complet en utilisant ces données de sortie réduites. Il est bien évidemment possible de construire un retour de sortie dynamique en introduisant, par exemple, un observateur fournissant une estimation de l'état complet qui sera utilisée dans la loi de commande. Cette méthode est efficace mais augmente la quantité d'opérations que doit réaliser le contrôleur. Or plusieurs auteurs ont développé des méthodes de contrôle qui n'utilisent que les informations de sortie pour contrôler le système. Par exemple, on peut se référer à [1]. Ces techniques réduisent la complexité des calculs. Cependant, il n'est pas toujours possible de construire une telle loi de commande qui stabilise les solutions du système.

Cet article propose une méthode permettant d'élargir la classe des systèmes stabilisables par retour de sortie statique en utilisant de récents résultats concernant les systèmes à retards. Dans [2], [3], il est montré que pour certains systèmes, la présence d'un retard non nul dans les

équations a un effet stabilisant. Cette idée laisse penser que pour un système qui n'est pas stabilisable par un retour de sortie statique classique, l'introduction d'un retard dans une loi de commande par retour de sortie statique peut aider à la stabilisation. Dans ce cas, on peut donc parler de *retard stabilisant*.

Cette idée de retard stabilisant n'est pas nouvelle. Plusieurs auteurs ont déjà dirigé leurs recherches dans cette direction [4], [5], [6], [7]. Il a été montré qu'effectivement l'ajout d'un retard peut aider à la stabilisation. Cependant ces résultats ne donnent aucune indication quant au réglage des gains et de la valeur du retard permettant d'améliorer les performances dynamiques du système. Dans [8], une commande par modes glissants où un retard est délibérément introduit dans la définition de la surface de glissement a été développée. Elle permet alors d'élargir la classe de système stabilisable par un retour de sortie statique. Cependant l'introduction d'un retard dans la loi de commande implique que le régulateur ait suffisamment de mémoire pour stocker ces informations. Il est évident que plus le retard sera important plus la mémoire devra être conséquente. Cet article est donc consacré à la prise en compte de la quantité d'information qu'il est nécessaire de mémoriser.

Cet article s'articule de la manière suivante. La partie suivante expose le problème en expliquant pourquoi un retard et un échantillonnage ont été introduits. La troisième partie concerne l'étude de la stabilité exponentielle du système en boucle fermée en utilisant des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii discrétisées ([3], [9]). Enfin, la dernière partie expose une méthode de détermination des paramètres de la loi de commande à travers la résolution d'un exemple académique.

Notations La notation $P > 0$ pour $P \in R^{n \times n}$ signifie que la matrice P est symétrique, définie positive. La matrice I_n représente la matrice identité de dimension $n \times n$. Les notations $|\cdot|$ et $\|\cdot\|$ se réfèrent, respectivement, à la norme euclidienne d'un vecteur et sa norme matricielle induite. Pour toute fonction ϕ de $C([-\tau; 0], R^n)$, on définit sa norme de la façon suivante $|\phi|_\tau = \sup_{s \in [-\tau, 0]} (|\phi(s)|)$.

The work by A. Seuret was partially supported by Euroepaen Commission through the HYCON Network of Excellence, the Swedish Foundation for Strategic Research and by the Swedish Research Council.

II. POSITION DU PROBLÈME

Considérons le système linéaire non retardé suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

où $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ et $y(t) \in R^p$, représentent l'état, l'entrée et la sortie du système. La loi de commande par retour de sortie statique est alors

$$u(t) = Ky(t) = KCx(t) \quad (2)$$

Le système en boucle fermée est alors régi par

$$\dot{x} = (A + BKC)x(t) \quad (3)$$

Ce système (A, B, C) est dit stabilisable par retour de sortie s'il existe un gain K tel que la matrice $A + BKC$ est de Hurwitz. Malheureusement, il n'est pas toujours possible de trouver une solution à ce problème. Considérons l'exemple suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le problème se réduit à la détermination d'un réel k tel que la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-k & 0.1 \end{bmatrix}$ ait des valeurs propres à partie réelle strictement négative, ce qui est évidemment impossible du fait que la trace reste toujours positive. En général, une solution envisageable est de construire un observateur permettant d'estimer l'état du système et ensuite d'utiliser cette estimation pour construire la commande. Il s'en suit que la quantité de calculs que le régulateur doit réaliser est beaucoup plus importante.

Remarque 1: Nous sommes aussi conscient que pour cet exemple, un simple correcteur proportionnel-dérivé suffirait à stabiliser le système. Cependant cet article ouvre une nouvelle piste de recherche pour la commande par modes glissants, de systèmes MIMO, bruités et pouvant comporter des non-linéarités.

Notre objectif consiste ici à réduire au maximum le nombre d'opérations à réaliser, ce qui exclut le choix d'une commande basée sur l'observation.

Une autre approche consiste à ajouter un retard dans la loi de commande afin de stabiliser le système [5],[7], [8]. En effet, il est connu que pour certains systèmes, plus particulièrement pour des systèmes dont les solutions sont oscillantes, l'ajout d'un retard permet de stabiliser les solutions. La commande est alors de la forme :

$$u(t) = KCx(t) + K_\tau Cx(t - \tau) \quad (4)$$

où τ est un retard délibérément introduit dans la loi de commande. L'intérêt de cette commande est de disposer de degrés de liberté supplémentaires (K_τ , mais aussi la valeur du retard τ) afin de stabiliser et régler la dynamique du système asservi. Dans [8], une technique a été développée pour optimiser ces paramètres par rapport à un critère de convergence exponentielle dans le cadre d'une commande par modes glissants.

Cependant, si l'on s'intéresse une nouvelle fois à la complexité de la loi de commande, on remarque que cette commande sollicite une mémoire importante de la part du

contrôleur car il doit conserver en mémoire les valeurs de la sortie dans l'intervalle $[t - \tau, t]$. Ce point soulève finalement un problème car il ne peut conserver qu'une certaine quantité de valeurs échantillonnées de la sortie. Toujours dans cet esprit de réduction de la complexité du contrôleur, une commande moins coûteuse en occupation de la mémoire serait la suivante :

$$u(t) = KCx(t) + K_\tau Cx(kT - \delta), \quad t \in [kT, (k+1)T[\quad (5)$$

où k est un entier naturel et $\delta > 0$ correspond à un retard constant. Notons que cette commande combine des termes continus et échantillonnés. L'utilisation de telles lois hybrides n'est pas nouvelle, on pourra — à titre d'exemple — se référer à [10].

L'objectif fixé dans la suite de cet article consiste donc à déterminer les paramètres de la commande (K, K_τ, δ, T) tels que les solutions du système (3) soient exponentielles avec un degré de convergence exponentielle le plus élevé possible.

III. STABILITÉ DU SYSTÈME EN BOUCLE FERMÉE

A. Préliminaires

Le système en boucle fermée est alors régi par

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + BK_\tau Cx(kT - \delta) \quad (6)$$

Considérons l'approche par retard variable [11] où il a été montré que l'effet de l'échantillonnage kT peut être assimilé à l'effet d'un retard variable particulier $\tau(t)$

$$\forall k \in N, \forall t \in [kT, (k+1)T[, \tau(t) = t + \delta - kT$$

On remarque que la fonction de retard est continue par morceaux et que sa dérivée est égale à 1 sauf aux instants d'échantillonnage kT . Dans [11], il a été montré que les conditions de stabilité ne comprenant pas de contraintes sur la dérivée du retard garantissent aussi la stabilité de système sujet à ce retard d'échantillonnage.

Dans suite, on utilisera la notation

$$\tau(t) = \tau^0 + \eta(t) \quad (7)$$

où $\tau^0 = \delta + T/2$ représente la valeur moyenne du retard d'échantillonnage et du retard constant δ et $\eta(t)$ représente la perturbation du retard par rapport à cette valeur moyenne. On remarque que la fonction η est bornée :

$$\forall t > 0, \quad |\eta(t)| \leq T/2 \quad (8)$$

B. Stabilité exponentielle

Afin d'améliorer les performances, on souhaite que les solutions du système soient α -stables. La stabilité exponentielle est un moyen d'assurer la rapidité de convergence. Comme dans [12], [13], pour tout $\alpha > 0$, un système à retard est dit α -stable, ou "exponentiellement stable et de degré de convergence α ", s'il existe un réel $\beta \geq 1$ tel que les solutions $x(t; t_0, \phi)$, pour toute condition initiale ϕ , vérifient :

$$|x(t, t_0, \phi)| \leq \beta |\phi| e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (9)$$

Le développement de conditions de stabilité exponentielle peut être obtenu à l'aide du changement de variable

$x_\alpha(t) = e^{\alpha t}x(t)$ ([14], [15]). Cette nouvelle variable vérifie l'équation différentielle

$$\dot{x}_\alpha(t) = (A + BKC + \alpha I)x_\alpha(t) + e^{\alpha\tau(t)}BK_\tau Cx_\alpha(t - \tau(t)) \quad (10)$$

On constate alors qu'un gain variant dans dans le temps est apparu dans les équations. Sachant que le retard $\tau(t)$ est borné, on déduit que le gain $e^{\alpha\tau(t)}$ est lui aussi borné entre $\beta_1 = e^{\alpha(\tau^0 - T/2)}$ et $\beta_2 = e^{\alpha(\tau^0 + T/2)}$. On utilise alors une décomposition polytopique de ce gain [14], conduisant au modèle

$$\dot{x}_\alpha(t) = \sum_{i=1,2} \lambda_i(t) \{ (A + BKC + \alpha I)x_\alpha(t) + \beta_i BK_\tau Cx_\alpha(t - \tau(t)) \} \quad (11)$$

avec

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda_1(t) \geq 0, \quad \lambda_2(t) \geq 0, \quad \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 1 \quad (12)$$

On peut alors utiliser le théorème suivant basé sur des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii discrétisées introduites dans [3].

Théorème 1: Le système (6) est exponentiellement stable et de degré de convergence $\alpha > 0$ s'il existe des matrices de dimension $n \times n$ notées $P_1 > 0$, R_a , P_2 , P_3 , $S_p = S_p^T$, Q_p et $R_{pq} = R_{qp}^T$, avec $p, q = 0, \dots, N$, qui satisfont aux LMI (13) pour $i = 1, 2$ et (14) avec $h = (\delta + T/2)/N$

$$\Pi_{\alpha i} = \begin{bmatrix} \Xi_{\alpha i} & D^s & D^a & \begin{bmatrix} T/2P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i BK_\tau C \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T/2R_a \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

et

$$\begin{bmatrix} P_1 & \tilde{Q} \\ * & \tilde{R} + \tilde{S} \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

où les matrices $\Xi_{\alpha i}$, pour $i = 1, 1$, sont définies par

$$\Xi_{\alpha i} = \begin{bmatrix} \Theta & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i BK_\tau C \end{bmatrix} \\ * & -S_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_N \\ 0_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

avec

$$\Theta = P^T \begin{bmatrix} A + BKC + \alpha I & I \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + BKC + \alpha I & -I \end{bmatrix}^T P + \begin{bmatrix} Q_0 + Q_0^T + S_0 & 0 \\ 0 & TR_a \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q} = [Q_0 \ Q_1 \ \dots \ Q_N], \quad \tilde{S} = \text{diag}\{1/hS_0, \dots, 1/hS_N\}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0_n \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} & \dots & R_{0N} \\ R_{01} & R_{11} & \dots & R_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N0} & R_{N1} & \dots & R_{NN} \end{bmatrix}.$$

et où, pour $i, j = 1, \dots, N$

$$S_d = \text{diag}\{S_0 - S_1, S_1 - S_2, \dots, S_{N-1} - S_N\},$$

$$R_{dij} = h(R_{(i-1)(j-1)} - R_{ij}),$$

$$R_d = \begin{bmatrix} R_{d11} & R_{d12} & \dots & R_{d1N} \\ R_{d21} & R_{d22} & \dots & R_{d2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{dN1} & R_{dN2} & \dots & R_{dNN} \end{bmatrix},$$

$$D^s = [D_1^s \ D_2^s \ \dots \ D_N^s],$$

$$D_i^s = \begin{bmatrix} (R_{0(i-1)} + R_{0i}) - (Q_{i-1} - Q_i) \\ h/2(Q_{i-1} + Q_i) \\ -h/2(R_{N(i-1)} + R_{Ni}) \end{bmatrix},$$

$$D^a = [D_1^a \ D_2^a \ \dots \ D_N^a],$$

$$D_i^a = \begin{bmatrix} -h/2(R_{0(i-1)} - R_{0i}) \\ -h/2(Q_{i-1} - Q_i) \\ h/2(R_{N(i-1)} - R_{Ni}) \end{bmatrix},$$

Remarque 2: Le théorème 1 est une extension du théorème 2.1 de [2] au cas de la stabilité exponentielle de systèmes à retards variables. Cependant l'ajout d'un critère de convergence exponentielle permet de garantir la rapidité de la convergence des solutions. Par la suite, ce critère permettra d'optimiser les paramètres de la loi de commande par retour de sortie.

Preuve : Considérons le système (11) sous une forme descripteur en introduisant l'état étendu $\bar{x}_\alpha(t) = \text{col}\{x_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t)\}$. Ainsi la dynamique du système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{x}}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ \begin{bmatrix} A + BKC + \alpha I & I \\ 0 & -I \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t - \tau(t)) \right\}$$

La formule de Leibnitz qui, pour tout signal dérivable, assure que $x(t - \tau(t)) = x(t - \tau^0) - \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau^0} \dot{x}(s)ds$, permet de réécrire le système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{x}}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \left\{ \begin{bmatrix} A + BKC + \alpha I & I \\ 0 & -I \end{bmatrix} \bar{x}_\alpha(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} x_\alpha(t - \tau^0) - \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau^0} \dot{x}(s)ds \right\}$$

La preuve utilise la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V_\alpha(t) = x_\alpha^T(t)P_1x_\alpha(t) + 2x_\alpha^T(t) \int_{-\tau^0}^0 Q(\xi)x_\alpha(t + \xi)d\xi + \int_{-\tau^0}^0 x_\alpha^T(t + \xi)S(\xi)x_\alpha(t + \xi)d\xi + \int_{-\tau^0}^0 \int_{-\tau^0}^0 x_\alpha^T(t + s)R(s, \xi)dsx_\alpha(t + \xi)d\xi + \int_{-T/2}^{T/2} \int_{t-\tau^0+\theta}^t x_\alpha^T(s)R_a x_\alpha(s)dsd\theta \quad (16)$$

où $P_1 > 0$, $Q(\xi) \in R^{(n-m) \times (n-m)}$, $R(s, \xi) = R^T(\xi, s) \in R^{(n-m) \times (n-m)}$, $S(\xi) \in R^{(n-m) \times (n-m)}$, et Q, R, S sont des fonctions matricielles continues. D'après [9, p. 185], V_α est définie positive si la LMI (14) est satisfaite. Ensuite la preuve suit la ligne définie dans [2] utilisant la modélisation descripteur [16] et la méthode de discrétisation définie dans [3].

Le premier terme de la fonctionnelle V_α peut alors s'écrire :

$$x_\alpha^T(t)P_1x_\alpha(t) = \bar{x}_\alpha(t) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P \bar{x}_\alpha(t),$$

avec $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$

La dérivation de V_α le long des trajectoires de (10)

conduit à :

$$\begin{aligned}\dot{V}_\alpha(t) = & 2\dot{x}_\alpha^T(t) \left[P_1 x_\alpha(t) + \int_{-\tau^0}^0 Q(\zeta) x_\alpha(t + \zeta) d\zeta \right] \\ & + 2x_\alpha^T(t) \int_{-\tau^0}^0 Q(\zeta) \dot{x}_\alpha(t + \zeta) d\zeta \\ & + 2 \int_{-\tau^0}^0 \int_{-\tau^0}^0 \dot{x}_\alpha^T(t + s) R(s, \zeta) ds x_\alpha(t + \zeta) d\zeta \\ & + 2 \int_{-\tau^0}^0 \dot{x}_\alpha^T(t + \zeta) S(\zeta) x_\alpha(t + \zeta) d\zeta \\ & + T \dot{x}_\alpha^T(t) R_a \dot{x}_\alpha(t) - \int_{t-\delta-T}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha^T(s) R_a x_\alpha(s) ds\end{aligned}\quad (17)$$

L'étape suivante consiste à exprimer la dérivée de la fonctionnelle d'une manière appropriée à la discrétisation. En intégrant par parties (17), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V}_\alpha(t) = & \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \{ \\ & \xi^T(t) \Xi_{\alpha i} \xi(t) + 2\dot{x}_\alpha^T(t) \int_{-\tau^0}^0 Q(\zeta) x_\alpha(t + \zeta) d\zeta \\ & - \int_{-\tau^0}^0 \dot{x}_\alpha^T(t + \zeta) \dot{S}(\zeta) x_\alpha(t + \zeta) d\zeta \\ & - \int_{-\tau^0}^0 \int_{-\tau^0}^0 \dot{x}_\alpha^T(t + s) \left(\frac{\partial}{\partial s} R(s, \zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} R(s, \zeta) \right) ds x_\alpha(t + \zeta) d\zeta \\ & + 2\dot{x}_\alpha^T(t) \int_{-\tau^0}^0 [-\dot{Q}(\zeta) + R(0, \zeta)] x_\alpha(t + \zeta) d\zeta \\ & - 2\dot{x}_\alpha^T(t - \tau^0) \int_{-\tau^0}^0 R(-\tau^0, \zeta) x_\alpha(t + \zeta) d\zeta \\ & + T \dot{x}_\alpha^T(t) R_a \dot{x}_\alpha(t) - \int_{t-T}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_a x_\alpha(s) ds \\ & - 2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{smallmatrix} \right] \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau^0} \dot{x}(s) ds \}\end{aligned}\quad (18)$$

où $\xi(t) = \text{col}\{\bar{x}_\alpha(t), x_\alpha(t - \tau^0)\}$ et $\Xi_{\alpha i}$ est définie dans l'équation (15) avec $Q(0)$, $Q(-\tau^0)$, $S(0)$ et $S(-\tau^0)$, respectivement à la place de Q_0 , Q_N , S_0 et S_N . La fonctionnelle de Lyapunov Krasovskii est maintenant exprimée dans une forme appropriée à la méthode de discrétisation.

Elle consiste à diviser l'intervalle $[-\tau^0, 0]$ en N segments $[\theta_p, \theta_{p-1}]$ ($p = 1, \dots, N$) de longueur $h = \tau^0/N$. Elle divise aussi le carré $[-\tau^0, 0] \times [-\tau^0, 0]$ en $N \times N$ petits carrés $[\theta_p, \theta_{p-1}] \times [\theta_p, \theta_{p-1}]$. Ensuite, chacun de ces petits carrés est divisé en triangles.

Les fonctions matricielles continues $Q(\xi)$ et $S(\xi)$ sont choisies linéaires sur chaque intervalle et $R(s, \xi)$ est choisie linéaire sur chaque triangle. Les définitions suivantes mettent en œuvre ces choix :

$$\begin{aligned}Q(\theta_p + \beta h) &= (1 - \beta) Q_p + \beta Q_{p-1}, \\ S(\theta_p + \beta h) &= (1 - \beta) S_p + \beta S_{p-1} \\ R(\theta_p + \beta h, \theta_q + \gamma h) &= \\ \begin{cases} (1 - \beta) R_{pq} + \gamma R_{(p-1)(q-1)} + (\beta - \gamma) R_{(p-1)q}, & \beta \geq \gamma \\ (1 - \gamma) R_{pq} + \beta R_{(p-1)(q-1)} + (\gamma - \beta) R_{(p-1)q}, & \beta \leq \gamma \end{cases}\end{aligned}$$

pour $0 \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq \gamma \leq 1$. De simples définitions de la dérivée de la matrices sont ainsi obtenues pour des valeurs appropriées de p et q :

$$\begin{aligned}\dot{S}(\xi) &= 1/h(S_{p-1} - S_p), \quad \dot{Q}(\xi) = 1/h(Q_{p-1} - Q_p) \\ \frac{\partial}{\partial s} R(s, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} R(s, \xi) &= 1/h(R_{(p-1)(q-1)} - R_{pq})\end{aligned}\quad (19)$$

Ainsi la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est complètement déterminée par les matrices P_1 , S_p , Q_p et R_{pq} , $p, q = 0, \dots, N$. D'après [9], la condition $V_\alpha \geq \epsilon \|x_\alpha\|$ est satisfaite si la LMI (14) est vérifiée. En utilisant (19), les équations suivantes sont déduites :

$$\begin{aligned}2\dot{x}_\alpha(t) \int_{-\tau^0}^0 Q(\xi) x(t + \xi) d\xi \\ = 2\dot{x}_\alpha(t) \sum_{p=1}^N \int_0^1 [(1 - \beta) Q_p + \beta Q_{p-1}] x_\alpha(t + \theta_p + \beta h) d\beta \\ = 2\dot{x}_\alpha(t) \sum_{p=1}^N \int_0^1 [(1 - \beta)(Q_p^s + Q_p^a) \\ + \beta(Q_p^s - Q_p^a)] x_\alpha(t + \theta_p + \beta h) d\beta\end{aligned}$$

où $Q_p^s = (Q_p + Q_{p-1})/2$ et $Q_p^a = (Q_p - Q_{p-1})/2$. Ainsi les équations (15), (18) et (19) impliquent [9] :

$$\begin{aligned}\dot{V}_\alpha(t) = & \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \{ \zeta^T(t) \Xi_{\alpha i} \zeta(t) - \int_0^1 \phi^T(\beta) \dot{S}_d \phi(\beta) d\beta \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \phi(\beta) R_d \phi(\gamma) d\beta d\gamma \\ & + 2\zeta(t) \int_0^1 [D^s + (1 - 2\alpha) D^a] \phi(\beta) d\beta \\ & + T R_a - \int_{t-T}^t \dot{x}_\alpha^T(s) R_a x_\alpha(s) ds \\ & - 2\bar{x}_\alpha^T(t) P^T \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{smallmatrix} \right] \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau^0} \dot{x}(s) ds \}\end{aligned}$$

où $\phi(\beta) = \text{col}\{x(t - h + \beta h), x(t - 2h + \beta h), \dots, x(t - Nh + \beta h)\}$.

En constatant que, pour toute matrice définie positive R_a et pour tout t, s et $i = 1, 2$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}x_\alpha^T(t) P^T \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{smallmatrix} \right] \dot{x}(s) \leq + \dot{x}^T(s) R_a \dot{x}(s) \\ + x_\alpha^T(t) P^T \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{smallmatrix} \right] R_a^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{smallmatrix} \right]^T P x_\alpha(t)\end{aligned}$$

et en intégrant par rapport à la variable s sur l'intervalle $[t - \tau(t), t - \tau^0]$ ou $[t - \tau^0, t - \tau(t)]$, selon la valeur de $\tau(t)$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V}_\alpha(t) \leq & \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t) \{ \\ & \zeta^T(t) \bar{\Xi}_{\alpha i} \zeta(t) - \int_0^1 \phi^T(\beta) \dot{S}_d \phi(\beta) d\beta \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \phi(\beta) R_d \phi(\gamma) d\beta d\gamma \\ & + 2\zeta(t) \int_0^1 [D^s + (1 - 2\alpha) D^a] \phi(\beta) d\beta \\ & + T R_a - \int_{t-\delta-T}^{t-\delta} \dot{x}_\alpha^T(s) R_a x_\alpha(s) ds\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\bar{\Xi}_{\alpha i} = & \bar{\Xi}_\alpha \\ & + \left[P^T \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{smallmatrix} \right] R_a^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \beta_i A_1 \end{smallmatrix} \right]^T P + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_a \end{smallmatrix} \right] \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]\end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 5.21 de [9] puis le complément de Schur, on en déduit que $\dot{V}_{1\alpha}(t) < 0$ si les LMI (13) sont satisfaites.

Pour conclure la démonstration, on déduit que x_α converge asymptotiquement vers la solution $x_\alpha = 0$ et par conséquent, l'état x du système initial (6) converge exponentiellement vers la solution $x = 0$ avec un degré de convergence α .

C. Exemple

Considérons le système (6) avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lorsque que l'on choisit $K = 0$ et $K_\tau = 1$, on retrouve l'exemple introduit dans [7] et [17]. Le théorème 1 ne peut alors garantir la stabilité asymptotique, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$, si le retard dû à l'échantillonnage n'est pas strictement positif (dans le cas d'un retard constant cette borne inférieure est $\tau_{min} = 0.11s$).

Ici, on cherche à déterminer les paramètres de la commande (δ, T) qui maximisent le degré de convergence α des solutions du système selon la capacité de la mémoire pour un couple de gains (K, K_τ) donné. Pour caractériser cette capacité, on définit γ , un entier positif, qui correspond au

nombre de valeurs que le calculateur peut conserver. On obtient ainsi une relation entre le retard constant introduit et la période d'échantillonnage :

$$\delta = \gamma T$$

En effet, si le calculateur peut conserver, par exemple, deux valeurs de la sortie en mémoire, il faut que le retard constant additionnel ne soit pas supérieur à deux fois la période d'échantillonnage, etc. On en déduit finalement l'expression du retard moyen $\tau^0 = (1 + 1/(2\gamma))\delta$.

On se propose ici de maximiser le degré de convergence α pour un ensemble de valeur de K , K_τ et τ^0 (déterminant ainsi les valeurs de δ et T pour un γ donné). La procédure d'optimisation se présente de la manière suivante :

Théorème 1

Choisir N ;
 $\alpha_{max} = 0$; $\tau_{opt}^0 = 0$;
 pour $K = K_{min} : \epsilon_K : K_{max}$
 pour $K_\tau = K_{\tau min} : \epsilon_{K_\tau} : K_{\tau max}$
 pour $\tau^0 = 0 : \epsilon_\tau : \tau_{max}^0$
 $\alpha = 0$;
 tant que Théorème 1 est satisfait
 si $\alpha > \alpha_{max}$,
 $\alpha_{max} = \alpha$;
 $\tau_{opt}^0 = \tau^0$;
 fin
 $\alpha = \alpha + \epsilon_\alpha$;
 fin
 fin
 fin
 fin

Ce programme requiert la définition des pas ϵ_K, \dots du processus d'optimisation.

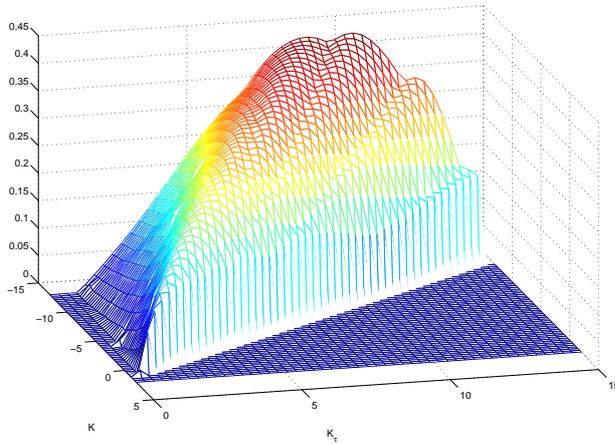


Fig. 1. Relation entre le couple de gains (K, K_τ) et la valeur maximale de α déterminés avec $N = 1$ et pour $\gamma = 2$

La figure représente le domaine d' α -stabilité en fonction des gains (K, K_τ) pour $\gamma = 2$. On remarque, dans un premier temps, qu'aucune valeur du gain K ne permet de stabiliser les solutions du système lorsque le gain K_τ est nul. En revanche, à partir d'une certaine valeur, l'influence du terme retardé permet de stabiliser le système.

Remarque 3: Notons que ces résultats ont été déterminés pour un niveau de discrétisation $N = 1$. Si l'on augmente N , le degré de convergence exponentielle maximale α_{max} et les paramètres de la commande δ et T seront différents pour un même couple de gains (K, K_τ) . On invite le lecteur à se référer à [8], pour plus de détails.

Lorsque l'on modifie le nombre γ de valeurs de la sortie que le calculateur peut garder en mémoire pour un couple de gains $(K = -4, K_\tau = 4)$ donné (valeurs prises dans le domaine de stabilité), on obtient finalement le tableau suivant qui donne les valeurs optimales de δ et de T qui correspondent au degré de convergence α maximal :

γ	0	1	2	3	
N=1	X	$\delta = 0.166$ $T = 0.166$ $\alpha = 0.158$	$\delta = 0.2$ $T = 0.1$ $\alpha = 0.265$	$\delta = 0.213$ $T = 0.071$ $\alpha = 0.318$	
	N=3	X	$\delta = 0.25$ $T = 0.25$ $\alpha = 0.266$	$\delta = 0.28$ $T = 0.14$ $\alpha = 0.425$	$\delta = 0.279$ $T = 0.093$ $\alpha = 0.504$

On peut noter premièrement que, lorsqu'on diminue le pas de discrétisation, les résultats sont moins conservatifs puisque le degré maximal de convergence α est toujours plus important pour $N = 3$ que pour $N = 1$. On remarque aussi que les valeurs du retard δ et de la période d'échantillonnage T qui maximisent le degré de convergence α ne sont pas identiques pour $N = 1$ et $N = 3$. Une nouvelle fois, nous invitons le lecteur à se référer à [8] pour plus de détails à ce sujet.

D'autre part, lorsqu'on augmente le nombre γ de valeurs à mettre en mémoire, la convergence est plus performante comme le montre la figure 2.

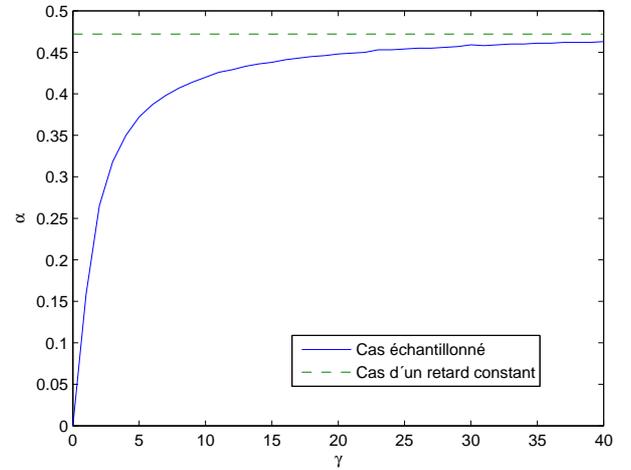


Fig. 2. Relation entre α et γ pour $N = 1$

Ce phénomène correspond finalement à la réduction de l'influence de la dernière ligne et la dernière colonne de la LMI (13) car, en augmentant γ , on diminue la longueur de la période d'échantillonnage par rapport au retard constant δ . On constate alors que plus γ est grand, plus on se rapproche du cas d'un retard constant. Pour cet exemple, on remarque que les performances dans le cas d'un contrôleur échantillonné sont presque équivalentes à celles du cas continu pour $\gamma \geq 10$.

La figure 3 présente les solutions du système pour $K = -4$, $K_\tau = 4$, $\delta = 0.28$ et $T = 0.14$.

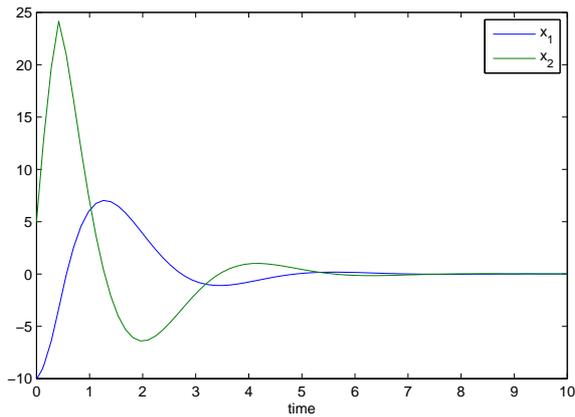


Fig. 3. Simulation du système pour les paramètres $K = -4$, $K_r = 4$, $\delta = 0.28$ et $T = 0.14$

IV. CONCLUSION

Une loi de commande par retour de sortie retardée et échantillonnée a été développée dans cet article pour un système non retardé qui ne serait pas stabilisable par un simple retour statique de sortie. Les conditions LMI basées sur des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii discrétisées ont permis de caractériser la convergence exponentielle du système. De plus, les résultats mettent en avant une relation entre la quantité de mémoire disponible dans le calculateur et la rapidité de convergence. En revanche, le théorème 1 ne permet pas de garantir la stabilité du système lorsque l'on souhaite développer une commande uniquement échantillonnée et non retardée (c'est-à-dire quand $\gamma = 0$) alors qu'en simulation un échantillonnage peut, à lui seul, stabiliser les solutions du système. Ceci suggère un certain conservatisme des conditions de stabilité qui pourrait être réduit en considérant de plus récentes publications sur les systèmes à entrées échantillonnées.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Edwards, S.K. Spurgeon, et R.G. Hebden. On the design of sliding mode output feedback controllers. *Int. Journal of Control*, 76(9-10) :893–905, 2003.
- [2] E. Fridman. Descriptor discretized Lyapunov functional method : Analysis and design. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 51(5) :890 – 897, 2006.
- [3] K. Gu. A further refinement of discretized Lyapunov functional method for the stability of time-delay systems. *Int. J. of Control*, 74 :967 – 976, 2001.
- [4] C. T. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read, et R. Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3106–3107, San Francisco, CA, 1993.
- [5] S.-I. Niculescu et C. T. Abdallah. Delay effects on static output feedback stabilization. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, December 2000.
- [6] S.-I. Niculescu, K. Gu, et C. T. Abdallah. Some remarks on the delay stabilizing effect in SISO systems. *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, USA, June 2003.
- [7] W. Michiels, S.-I. Niculescu, et L. Moreau. Using delays and time-varying gains to improve the static output feedback stabilizability of linear systems : a comparison. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(4) :393–418, 2004.
- [8] A Seuret, C. Edwards, S.K. Spurgeon, et E. Fridman. Static output feedback sliding mode control design via an artificial stabilizing delay. *accepted in IEEE Trans. Automatic Control*, 2008.
- [9] K. Gu, V.-L. Kharitonov, et J. Chen. *Stability of time-delay systems*. Birkhauser, 2003.

- [10] V. Koncar et C. Vasseur. Control of linear systems using piecewise continuous systems. *IEEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 150(6) :565 – 576, 2003.
- [11] E. Fridman, A. Seuret, et J.-P. Richard. Robust sampled-data stabilization of linear systems : An input delay approach. *Automatica*, 40(8) :1141–1446, 2004.
- [12] S.-I. Niculescu, C.-E. de Souza, L. Dugard, et J.-M. Dion. Robust exponential stability and stabilization of uncertain systems with time-varying delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(5) :743–748, 1998.
- [13] A. Seuret, M. Dambrine, et J.-P. Richard. Robust exponential stabilization for systems with time-varying delays. *TDS04*, Leuven, 2004.
- [14] A. Seuret, M. Dambrine, et J.-P. Richard. Robust exponential stabilization for systems with time-varying delays. *5th Workshop on Time Delay Systems*, September 2004.
- [15] S. Xu, J. Lam, et M. Zhong. New exponential estimates for time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(9) :1501–1505, 2006.
- [16] E. Fridman et U. Shaked. A descriptor system approach to H^∞ control of linear time-delay systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(2) :253–270, 2002.
- [17] E. Fridman. Stability of systems with uncertain delays : a new "complete" Lyapunov-Krasovskii functional. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 51(5) :885 – 890, 2006.